Потоковый алгоритм нахождения плана ранних сроков работ для обобщенных сетевых моделей

В.Е. Белоусов

к.т.н., доцент, заведующий кафедрой АТПиП Воронежского государственного технического университета; г. Воронеж

e-mail: belousov@vgasu.vrn.ru

Л.П. Мышовская

к.т.н., доцент кафедры ТОСЭУН Воронежского государственного технического университета; г. Воронеж

И.В. Поцебнева

к.т.н., доцент кафедры АТПиП Воронежского государственного технического университета; г. Воронеж

Аннотация. Авторы статьи предлагают общую постановку задачи временного анализа, а также формализованное описание алгоритма поиска планов ранних сроков производства работ в многоуровневых системах, эффективных по Парето и позволяющих существенно сократить количество итераций по сравнению с линейным подходом.

Ключевые слова: алгоритм, сроки, производство, работа, эффективность.

Введение

Широкое использование потоковых алгоритмов на сетях [1], в частности на обобщенных сетевых моделях [2], вызвано целым рядом причин, среди которых можно выделить следующие. Алгоритмы обеспечивают быструю сходимость по сравнению с общими методами линейного программирования, решают многокритериальную задачу, находят планы, не только удовлетворяющие условию Парето, но и не улучшаемые ни по одному из критериев, допускают огромное количество модификаций, позволяющих не только ускорять сходимость, но и находить планы, удовлетворяющие различным векторным критериям.

Пусть X – конечное множество, $x \in X$ интерпретируется как идентификатор события x, U – конечное множество связей (дуг), Θ – пространство планов – функций, заданных на X. Если T, $T \in \Theta$ и $T_x \le T'_x$ для всех $x \in X$, то будем писать $T \le T'$. Заданы функции 1 и $L \in \Theta$, $1 \le L$ и функция α на множестве U.

План T назовем непротиворечивым на связи $(x, y) \in U$, если:

$$T_x + \alpha_{xy} \le T_y. \quad (1)$$

План T назовем удовлетворяющим ранним директивным ограничениям, если:

$$1 < T \quad (2)$$

и поздним директивным ограничениям, если:

$$T \le L. \quad (3)$$

Постановка задачи

Среди планов, непротиворечивых на всех связях и удовлетворяющих как ранним, так и поздним директивным ограничениям, необходимо найти такие, которые доставляют экстремум линейной форме $f(T)$ или векторной линейной форме: $F(T)=(F_1(T), ..., F_m(T))$.

Известно, что если множество Θ_1 допустимых (выполнены соотношения (1), (2), (3)) планов задачи не пусто, то существуют два плана T_*, $T^* \in \Theta_1$, называемые соответственно планами ранних и поздних сроков, такие что: $T_* < T < T^*$ для любого $T \in \Theta_1$.

План ранних сроков минимизирует векторную линейную форму: $T_x \to min$ для всех $x \in X$.

Аналогичное утверждение справедливо для плана поздних сроков: $T_x \to max$ для всех $x \in X$.

План T^* не улучшаем ни по одному из критериев T_x. Благодаря этому векторный критерий можно свернуть в скалярной в форме:

$$\sum_{x \in X} \lambda_x T_x \to min, \quad (4)$$

где λ_x – любые заданные положительные числа (в частности, равняющиеся единице).

Для T^* будем иметь: $\sum_{x \in X} \lambda_x T_x \to max.$

Критерий (4) является линейным, поэтому для нахождения плана ранних сроков можно использовать методы линейного программирования [3]. Если задан план T, то его продолжительность τ определяется следующим образом: $\tau = \max_{x,y \in X} |T_x - T_y|$.

Известно [2], что планом сжатых сроков называется план минимальной продолжительности. Задача поиска планов сжатых сроков не является линейной, однако она может быть линеаризована путем введения двух фиктивных событий ξ и η($\tilde{X} = X \cup \{\xi\} \cup \{\eta\}$) и добавления к множеству U связей вида (ξ, x) и (x, η) для $x \in X$, а к соотношениям (1) – неравенств: $T_\xi \le T_x$, $x \in X$, $T_x \le T_\eta$, $x \in X$.

Теперь задача поиска планов сжатых сроков ставится как задача минимизации линейного критерия $f = T_\eta - T_\xi$. Эта задача, так же как и задача поиска планов ранних и поздних сроков, может быть решена методами линейного программирования. Однако более эффективными в данном случае [2, 3] являются потоковые алгоритмы (Форда) [4].

Алгоритм нахождения плана ранних сроков

Весьма часто множество U связей может быть представлено в виде объединения некоторых характерных подмножеств $V_i \subset U$. Процесс построения плана начинается с плана 1, который, как правило, не является допустимым, т. к. для некоторых связей не выполнено условие (1). Этот план постепенно корректируется, т.е. предполагаемые моменты свершения событий увеличиваются по некоторому правилу. А именно, как только обнаруживается, что для $(x, y) \in U$ неравенств (1) не выполнено, значение плана на событии y увеличивается и становится равным левой части неравенства (1). Таким образом, в процессе коррекции сроки свершения событий текущего плана возрастают.

Учитывая все это, будем рассматривать различные математические объекты, связанные с произвольным множеством $V \subset U$ и произвольными «директивными» ранними сроками $T^\circ \ge 1$.

Для $V \subset U$ и $T^\circ \ge 1$ план T назовем (V, T°) – допустим, если $T \ge T^\circ$ и неравенство (1) выполнено для всех $(x, y) \in V$.

Для $V \subset U$ и $T^\circ \ge 1$ план T назовем планом (V, T°) – ранних сроков, если T является (V, T°) – допустимым и $T \le T_1$ для любого (V, T°) – допустимого плана T_b. Обозначим:

$$T = \bar{V} T^\circ. \tag{5}$$

Оператор $\bar{V}$ назовем оператором ранних сроков, соответствующим множеству $V \subset U$.

Свойства семейства операторов $\{\bar{V}\} V \subset U$:

1. (идемпотентность) $\bar{V}^2 = \bar{V}$;
2. (двойная монотонность) если $V_1 \subset V_2$ и $T^{(1)} \le T^{(2)}$, то $\bar{V}_1 T^{(1)} = \bar{V}_2 T^{(2)}$;
3. $\bar{V}_2 \bar{V}_1 \le \bar{V}_1 \cup \bar{V}_2$;
4. Оператор Ø является единичным: Ø$T = T$.

Если V состоит из одной связи (y, z), то:

$$\left(\{(y,z)\}T\right)_x \equiv (\bar{V}T)_x = \begin{cases} T_x, \text{ если } x \ne z \\ max\left\{T_x, T_y + \alpha_{xy}\right\}, \text{ если } x = z \end{cases}.$$

В данном случае $\bar{V}$ является элементарным оператором, изменяющим план T не более, чем для одного события z. В общем случае $\bar{V}$ является произведением элементарных операторов. Обозначим через $\Gamma(V)$ множество путей, состоящих из элементов множества V, объединенное с множеством фиктивных путей вида (x, x) нулевой длины. Пусть конечная точка x_q пути $\gamma_1 = (x_1; x_2, ..., x_q)$ совпадает с начальной точкой пути $\gamma_2 = (x_q, x_{q+1}, ..., x_m)$. Обозначим через γ_1, γ_2 объединенный путь: $\gamma_1 \gamma_2 = (x_1; x_2, ..., x_q, x_{q+1}, \ldots, x_m)$.

Умножение путей обладает свойством ассоциативности: произведение нескольких путей $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_k$ не зависит от расстановки скобок. Для $V_1 ..., V_k$ обозначим через $\Gamma(V_1 ..., V_k)$ множество путей вида $\gamma = \gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots \gamma_{im}$, где $\gamma_{ij} \in V_{ij}$; $l \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le k$.

$\Gamma(V_{i1}, V_{i2}, ..., V_{im}) \subset \Gamma(V_1, V_2, ..., V_k)$ для любой последовательности индексов $l < i_1 < i_2 < ... < i_m < k$. Обозначим через $\Gamma_n(V_1, ..., V_k)$ множество путей вида $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$, $m \le n$, где $\gamma_i \in \Gamma(V_1, V_2, ..., V_k)$, $m \le n$.

Для любых $V_1, ..., V_k$ найдется такое n, что $\Gamma_n(V_1, V_2, ..., V_k)$ содержит все пути без циклов, принадлежащие множеству $\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right)$. Заметим, что последовательность $\Gamma_\eta(V_1, ..., V_k)$, $n \ge 1$ является расширяющейся по включению, содержащейся, тем не менее, в $\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right)$. В эту последовательность постепенно включаются не только пути без циклов, но и пути с циклами.

Следовательно: $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_\eta(V_1, \ldots, V_k) = \Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_i\right)$, т.е. множества $\Gamma_n(V_1, V_2, ..., V_k)$ исчерпывают все множество $\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right)$.

Для $V \subset U$ обозначим через $A(V)$ и $B(V)$ множества начальных (x) и соответственно конечных (y) событий для всех связей $(x, y) \in V$. Для $V_1, V_2 \in U$ обозначим: $C(V_1, V_2) = B(V_2 \backslash V_1) \cap A(V_1)$.

Для любых $V_1, V_2 \subset U$ имеет место следующая оценка: $s(V_1, V_2) \le |C(V_1, V_2)| + 1$.

Последовательность множеств $У_b, ..., У_k$ назовем односторонней, если при любом $i = l, ..., k$ множество $C\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j, V_i\right)$ пусто.

Если $V_1, \ldots, V_k$ – односторонняя последовательность, то $s(V_1, \ldots, V_k) = 1$.

$\overline{\bigcup_{i=1}^{k} V_i} = (\bar{V}_k, \ldots, \bar{V}_1)^n$, при любом $n \ge s(V_1, \ldots, V_k)$.

Если:

$$(\bar{V}_k \ldots \bar{V}_1)^{\eta+1} T^\circ, \tag{6}$$

то: $\overline{\underset{i=1}{\overset{k}{U}} V_i T^\circ} = (\bar{V}_k \ldots \bar{V}_1)^\eta T^\circ$.

В самом деле, из условия (6) вытекает, что $(\bar{V}_k \ldots \bar{V}_1)^{\eta+N} T^\circ = (\bar{V}_k \ldots \bar{V}_1)^n T^\circ$ при любом $N>0$. Возьмем $N>s(V_1, \ \ldots \ ,V_k)-n$. В силу теоремы $(\bar{V}_k \ldots \bar{V}_1)^{\eta+N} T^\circ = \overline{\underset{i=1}{\overset{k}{U}} V_i T^\circ}$, что и требовалось доказать.

Если при $n \geq 1$ оператор $\bar{V}_1$ не меняет плана $(\bar{V}_1 \bar{V}_2)^\eta T^\circ$ или оператор $\bar{V}_2$ не меняет плана $\bar{V}_1(\bar{V}_2 \bar{V}_1)^{\eta-1} T^\circ$, то найденный план $(\bar{V}_1 \bar{V}_2)^\eta T^\circ$ является планом $(V_1 U V_2, T^\circ)$ ранних сроков.

Пусть, например, $\bar{V}_1(\bar{V}_2 \bar{V}_1)^n T^\circ = (\bar{V}_2 \bar{V}_1)^n T^\circ$.

Подействуем на обе части равенства оператором $\bar{V}_2$: $(\bar{V}_2 \bar{V}_1)^{n+1} T^\circ = \bar{V}_2^2 \bar{V}_1 (\bar{V}_2 \bar{V}_1)^{n+1} = (\bar{V}_2 \bar{V}_1) \cdot (\bar{V}_2 \bar{V}_1)^{n-1} T^\circ = (\bar{V}_2 \bar{V}_1)^n T^\circ$.

План T назовем T°-допустимым вдоль пути $\gamma = (x_0, \ \ldots \ , x_q)$, если выполняются неравенства: $T^\circ_{x_0} \leq T_{x_0}, T_{x_i} + \alpha_{x_i x_{i+1}} = T_{x_i}, (i = 1, \ldots, q-1)$.

План T назовем T°-напряженным вдоль пути $\gamma = (x_0, \ ..., \ x_q)$, если выполнены равенства: $T^\circ_{x_0} = T_{x_0}, T_{x_i} + \alpha_{x_i x_{i+1}} \leq T_{x_i}, (i = 1, \ldots, q-1)$.

Равенство $T = \bar{V}_k \bar{V}_{k-1} \ldots \bar{V}_1 T^\circ$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

1) план T является T°-допустимым для любого пути $\gamma \in \Gamma(V_1, ..., V_k)$;

2) для любого события x найдется такой путь $\gamma \in \Gamma(V_1, ..., V_k)$, оканчивающийся в x, для которого план T является T°-напряженным.

Алгоритм построения плана ранних сроков

Пусть дано множество U и директивные ранние сроки l. Выбираются такие подмножества из U:

$$V_1, ... V_\nu, \tag{7}$$

и

$$W_1, \ldots, W_\mu, \tag{8}$$

что $U = VUW$, где $V = \bigcup_{i=1}^{\nu} V_i$, $W = \bigcup_{i=1}^{\mu} W_j$ причем последовательности (7), (8) являются односторонними. Выбор целесообразно осуществить так, чтобы число $n = |C(V,W)|$ было сравнительно мало. Тогда очевидно, что $\bar{V} = \bar{V}_\nu \ldots \bar{V}_1$, $\bar{W} = \bar{W}_\mu \ldots \bar{W}_1$, $\bar{U} = (\bar{W} \bar{V})^n$.

Применяя к плану последовательно операторы:

$$\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_\nu, \bar{W}_1, \ldots, \bar{W}_\mu, \tag{9}$$

затем снова (9) и т.д. n раз, мы получим план ранних сроков $\bar{U}_l$. Если на некотором шаге оказалось, что оператор $\bar{V}$ или $\bar{W}$ не изменил план, значит, план ранних сроков построен, и дальнейшая итерация не нужна. Рекомендуемая оценка числа итераций $n = |C(V, W)|$ является конструктивной и более точной по сравнению с принятой оценкой $m = |W|$, т.е. $n \leq m$.

Может, однако, случиться, что множество допустимых планов пусто. Это может произойти при наличии положительного цикла. В этом случае, сколько бы раз мы ни применяли операторы V и W, сроки свершения событий будут возрастать. Для того, чтобы проверить, пусто или нет множество допустимых планов, достаточно к плану: $T = (\bar{V} \bar{W})^n l$ один раз применить оператор V. Если T не изменится, то множество не пусто, и план ранних сроков T построен. В противном случае, т.е. если хотя бы одно V_i изменит план T, существует положительный цикл, и допустимых планов не существует.

После нахождения планов T_* и T^* для анализа множества допустимых планов следует найти общие резервы R: $F = T^* - T_*$, а также частные резервы: $r_x = \min_y \{(T_*)_y - \alpha_{xy}\} - (T_*)_y$.

Заключение

Таким образом, предложенный в работе алгоритм не только дает более широкий и систематизированный взгляд на потоковые инструменты на базе обобщенных сетевых моделей, но и позволяет получать его многочисленные модификации при условии использования конкретной информации о структуре множества потоков работ.

Литература

1. Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем. М.: Наука, 1982. – 200 с.

2. Белоусов В.Е. Алгоритм для анализа вариантов решений в многокритериальных задачах [Текст] / Аксененко П.Ю., Белоусов В.Е., Кончаков С.А.// Системы управления и информационные технологии. – 2015. – № 4(62). – С. 31–33.

3. Белоусов В.Е. К проблеме решения задач многокритериальной оптимизации / В.Е. Белоусов, А.В. Гайдук, В.Н. Золоторев // Системы управления и информационные технологии. – 2006. – № 3(25). – С. 34–43.

4. Белоусов В.Е., Лютова К.Г., Нгуен Вьет Туан. Модели квалиметрической оценки состояний сложных технических систем [Электронный]// «Качество продукции: контроль, управление, повышение, планирование». Матер. Международная молодежная научно-практическая конференция. Курск (17–18 ноября 2015 г.): Изд-во Юго-Западного гос. ун-та. Т. 1, 2015. – С. 342–346.

Stream Algorithm of Finding of the Plan of Early Terms of Works for the Generalized Network Models

V.E. Belousov, *candidate of technical sciences, associate professor, head of department «Automation of technological processes and productions» of the Voronezh state technical university; Voronezh*

e-mail: belousov@vgasu.vrn.ru

L.P. Mishovskaya, *candidate of technical sciences, associate professor of the department «Technology, organization of construction, examination and management of the real estate» of The Voronezh state technical university, Voronezh;*
I.V. Potsebneva, *candidate of technical sciences, associate professor of the department «Automation of technological processes and productions» of the Voronezh state technical university; Voronezh*

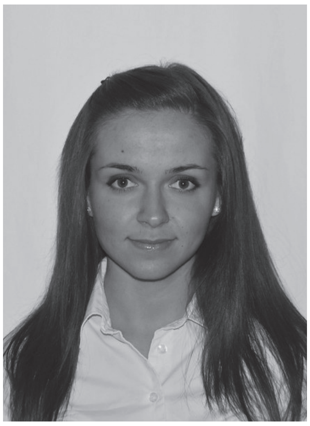
Summary. In this article the general problem definition of the temporary analysis and the formalized description of an algorithm of search of plans of early terms of works in multilevel systems effective according to Pareto and allowing to reduce significantly the number of iterations in comparison with linear approach is offered.

Keywords: algorithm, terms, production, work, efficiency.

References:

1. Tsvirkun A.D. Bases of synthesis of structure of difficult systems. Science. Moscow, 1982. 200 p.
2. Belousov V.E., Aksenenko P.Yu., Konchakov S.A. An algorithm for the analysis of versions of decisions in multicriteria tasks. *Control systems and information technologies.* 2015, No. 4(62). pp. 31–33.
3. Belousov V.E., Gayduk A.V., Zolotorev V.N. To the problem of the solution of problems of multicriteria optimization. *Control systems and information technologies.* 2006, No. 3(25). pp. 34–43.
4. Belousov V.E., Lyutova K.G., Nguen Viet Tuag. Models of qualimetrical assessment of conditions of difficult technical systems. «Quality of production: control, management, increase, planning». *Mater. International youth scientific and practical conference. Kursk on November 17-18, 2015. Publishing house of Southwest state university.* 2015, Volume 1. pp. 342–346.

Модель системы оперативного реагирования при производственном планировании



Е.А. Скорнякова

аспирант кафедры И2 «Инжиниринг и менеджмент качества» Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова; Санкт-Петербург

e-mail: elizavetasesina@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассмотрены основные проблемы, возникающие при оценке производственных опций ответственными подразделениями, предложена модель оперативного реагирования при производственном планировании, а также – решение для оптимизации и ускорения процесса оценки производственных опций.

Ключевые слова: модель системы оперативного реагирования, производственное планирование, производственный план, масштаб реального времени.

В современных экономических и политических условиях одной из главных проблем, с которыми сталкиваются российские компании и компании, имеющие производство в нашей стране, является возможность принять оперативное управленческое решение. Возникающие при этом сложности обусловлены множеством внешних и внутренних факторов. К внешним факторам относятся постоянно меняющиеся рыночные условия (колебания спроса, поддержка продаж продукции и т.д.), а также риски со стороны поставщиков ресурсов. К внутренним можно отнести недостаточную производительность и поломку оборудования, проведение модернизации оборудования, внедрение глобальных проектов и риски управления персоналом. Чтобы минимизировать влияние перечисленных факторов на производство и выполнить весь объем заказов к установленному сроку, необходимо создать сбалансированную систему оперативного производственного планирования.

Особую важность оперативное планирование представляет для высокопроизводительных производств, минута простоя которых оценивается сотнями тысяч рублей. Такие предприятия наиболее восприимчивы к действию внешних и внутренних факторов, и оценка рисков здесь является наиболее сложной. Также следует обратить внимание на оперативность обновления и передачи информации на предприятиях с большим