



Параметрический анализ напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Решение краевых задач



Б.В. Бойцов

*д.т.н., профессор,
заведующий кафедрой
104 «Технологическое
проектирование
и управления
качеством» НИУ МАИ,
первый вице-президент
Академии проблем
качества; Москва*



Л.М. Гавва

*к.т.н., ведущий
инженер, доцент
Московского
авиационного
института (НИУ);
Москва*

e-mail: rva101@mail.ru

Аннотация. Актуализация концепции качества, реализация системного качественного подхода к расчету и изготовлению перспективных образцов авиационной техники из современных композиционных материалов являются ключевыми вопросами в обеспечении качества продукции в авиаракетостроении.

В первой части статьи приводятся соотношения математической модели для исследования напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Уточняется математическая модель подкрепляющего элемента при закручивании в условиях одностороннего контакта с обшивкой. Учитывается влияние процесса технологии изготовления панелей: остаточных температурных напряжений и предварительного натяжения арм ирующих волокон. На основании вариационного принципа Лагранжа построены разрешающее уравнение восьмого порядка и естественные граничные условия. Во второй части статьи рассматривается класс точных аналитических решений краевых задач в одинарных тригонометрических рядах. В операционной среде *MATLAB* разработан пакет прикладных программ. Проанализировано влияние конструктивных параметров на уровень напряжений и перемещений.

Ключевые слова: панели из композиционных материалов, эксцентричный продольно-поперечный набор, тонкостенный стержень, несимметричная структура пакета, силовое и технологическое температурное воздействие, напряженно-деформированное состояние, одинарные тригонометрические ряды, *MATLAB*.

В операционной среде *MATLAB* построены программы и реализован процесс компьютерной многокритериальной оптимизации с учетом технологии изготовления конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов, находящихся в условиях силового, внешнего температурного и технологического температурного воздействия.

Решение новой задачи проектирования – проектирование под заданную стоимость – возможно при объединении моделей высокой точности с современными компьютерными технологиями. Перспективное направление исследований – проектирование композитных конструкций с учетом технологии изготовления, когда технологический процесс принимается во внимание на этапе разработки изделия. Приоритеты в создании инновационных технологий в рамках развития авиационной техники возникают в результате формирования и интеграции системы менеджмента качества проекта. Реализация системного качественного подхода к расчету и изготовлению перспективных образцов авиационной техники из современных композиционных материалов является ключевым вопросом в обеспечении стабильного качества и одновременно инструментом управления качеством продукции в аэрокосмической отрасли.

Рассматриваются задачи изгиба плоской прямоугольной многослойной панели, изготовленной из полимерных волокнистых композиционных материалов, с эксцентричным продольно-поперечным

набором (рис. 1), с эксцентричным продольным набором (рис. 2) и плоской прямоугольной композитной панели с несимметричной по толщине структурой пакета (рис. 3). Панели находятся под действием произвольным образом распределенной поперечной нагрузки $q(x,y)$ в стационарном температурном поле интенсивности ΔT . Условия закрепления контура предполагаются достаточно общими.

Принимаются во внимание технологические факторы, имеющие место при изготовлении композитов: остаточные температурные напряжения, возникающие при охлаждении после завершения процесса отверждения, и предварительное натяжение армирующих волокон, осуществляемое в целях повышения несущей способности конструкции. Препреги при укладке слоев предварительно натянуты, после отверждения натяжение снято.

Задачи решаются в перемещениях с использованием гипотез технической теории тонких пластин для обшивки и приводятся к нахождению смещений единой базисной поверхности приведения. В качестве расчетной модели предлагается схематизация панелей как конструктивно-анизотропных с «размазыванием» жесткостей тонкостенных подкрепляющих элементов, которые находятся в условиях сложного сопротивления вследствие одностороннего контакта с обшивкой. Дальнейшее развитие теории тонкостенных упругих стержней применительно к общей контактной задаче для обшивки и ребра с уточнением модели последнего при закручивании составляет научную новизну работы.

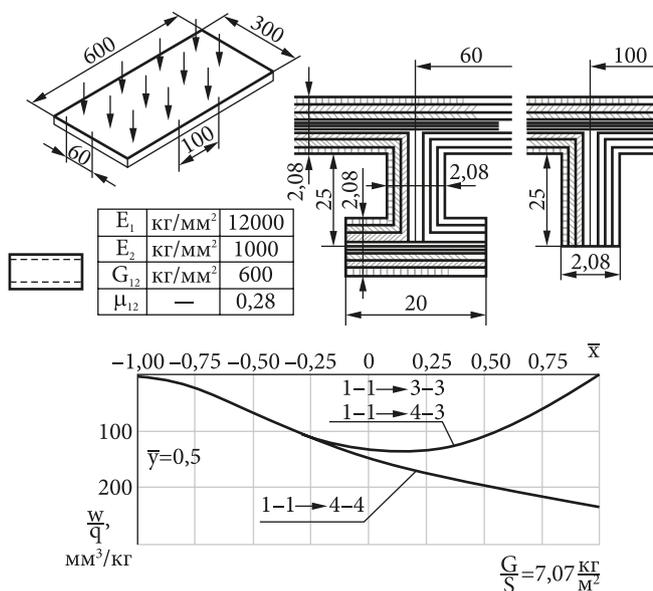


Рис. 1. Панель с продольно-поперечным набором. Несимметричная краевая задача. Зависимость прогибов от типа граничных условий на торцах. Граничные условия: плоская задача – задача изгиба; 1 – защемление, 2 – скользящая заделка, 3 – шарнир, 4 – свободный край

Проблема определения напряженно-деформированного состояния (НДС) конструктивно-анизотропных панелей сведена к решению краевой задачи для уравнения восьмого порядка в частных производных в прямоугольной области. Данное решение в замкнутом виде построено в одинарных тригонометрических рядах для частного случая согласованных граничных условий по двум противоположным кромкам, а также методом однородных решений для произвольных несогласованных граничных условий на контуре. Рассматриваются все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба.

С математической точки зрения проблема исследования напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей, трактуемых как ортотропные, сводится к решению краевой задачи в прямоугольной области для неоднородного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных относительно искомой потенциальной функции $\Phi(x,y)$ [1-3]

$$L^{(8)}\Phi = q. \tag{1}$$

Линейный дифференциальный оператор (1) содержит производные четной степени по каждой из координат:

$$L^{(8)} = \frac{K_{80}}{a^8} \frac{\partial^8}{\partial x^8} + \frac{K_{62}}{a^6 b^2} \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{K_{44}}{a^4 b^4} \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + \frac{K_{26}}{a^2 b^6} \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{K_{08}}{b^8} \frac{\partial^8}{\partial y^8}.$$

Линейные дифференциальные операторы связи кинематических и статических компонентов НДС с разрешающей потенциальной функцией $\Phi(x,y)$

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= L_{u_0} \Phi \\ v_0 &= L_{v_0} \Phi \\ w &= L_w \Phi \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= L_{N_x} \Phi - N_x^T - N_x^H \\ N_{xy} &= L_{N_{xy}} \Phi - N_{xy}^T - N_{xy}^H \\ \bar{Q}_x &= L_{\bar{Q}_x} \Phi \\ M_x &= L_{M_x} \Phi - M_x^T - M_x^H \\ H_{xy} &= L_{H_{xy}} \Phi - H_{xy}^T - H_{xy}^H \end{aligned} \right\}$$



имеют вид

$$L_{u_0} = \frac{R_{50}}{a^5} \frac{\partial^5}{\partial x^5} + \frac{R_{32}}{a^3 b^2} \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + \frac{R_{14}}{a b^4} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4}$$

$$L_{v_0} = \frac{S_{41}}{a^4 b} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + \frac{S_{23}}{a^2 b^3} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{S_{05}}{b^5} \frac{\partial^5}{\partial y^5},$$

$$L_w = \frac{R_{40}}{a^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{R_{22}}{a^2 b^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{R_{04}}{b^4} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$L_{N_x} = \frac{P_{60}^x}{a^6} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{P_{42}^x}{a^4 b^2} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{P_{24}^x}{a^2 b^4} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{P_{06}^x}{b^6} \frac{\partial^6}{\partial y^6}$$

$$L_{N_{xy}} = \frac{Q_{51}^x}{a^5 b} \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + \frac{Q_{33}^x}{a^3 b^3} \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{Q_{15}^x}{a b^5} \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5}$$

$$L_{\bar{Q}_x} = \frac{T_{70}^x}{a^7} \frac{\partial^7}{\partial x^7} + \frac{T_{52}^x}{a^5 b^2} \frac{\partial^7}{\partial x^5 \partial y^2} + \frac{T_{34}^x}{a^3 b^4} \frac{\partial^7}{\partial x^3 \partial y^4} + \frac{T_{16}^x}{a b^6} \frac{\partial^7}{\partial x \partial y^6},$$

$$L_{M_x} = \frac{R_{60}^x}{a^6} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{R_{42}^x}{a^4 b^2} \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} + \frac{R_{24}^x}{a^2 b^4} \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{R_{06}^x}{b^6} \frac{\partial^6}{\partial y^6}$$

$$L_{H_{xy}} = \frac{S_{51}^x}{a^5 b} \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + \frac{S_{33}^x}{a^3 b^3} \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{S_{15}^x}{a b^5} \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5}$$

$L_{N_y}, L_{N_{yx}}, L_{\bar{Q}_y}, L_{M_y}, L_{H_{yx}}$ строятся аналогично $L_{N_x}, L_{N_{xy}}, L_{\bar{Q}_x}, L_{M_x}, L_{H_{xy}}$ с заменой коэффициентов с индексом «х» на коэффициенты с индексом «у»; дифференциальные операторы $L_{N_y}, L_{N_{yx}}, L_{M_y}, L_{H_{yx}}$ – шестого порядка, дифференциальный оператор $L_{\bar{Q}_y}$ – седьмого порядка; $N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T, N_{yx}^T, M_x^T, M_y^T, H_{xy}^T, H_{yx}^T$ – температурные усилия и моменты, $N_x^H, N_y^H, N_{xy}^H, N_{yx}^H, M_x^H, M_y^H, H_{xy}^H, H_{yx}^H$ – усилия и моменты от натяжения.

Коэффициенты $K_{8-i,i}, i=0,2,4,6,8$ в разрешающем уравнении (1) и коэффициенты $R_{4-i,i}, i=0,2,4, R_{5-i,i}, i=0,2,4, S_{5-i,i}, i=1,3,5$ и т.д. в формулах связи (2) – постоянные величины, которые зависят от упругих свойств материала и геометрических параметров конструкции; $x = x/a, y = y/b$ – безразмерные координаты, отнесенные к полудлине a и к ширине панели b , соответственно.

Линейные дифференциальные операторы связи (2) для симметричных компонентов НДС так же, как и линейный дифференциальный оператор разрешающего уравнения (1), содержат производные четной степени по каждой из координат. Косо-симметричные компоненты НДС определяются нечетными производными.

Краевая задача общего вида в прямоугольной области представлена условиями упругой заделки при $x=const$

$$\begin{aligned} (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) &= (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = \\ &= (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

при $y=const$

$$\begin{aligned} (\alpha_1 u_0 + \beta_1 N_{yx}) &= (\alpha_2 v_0 + \beta_2 N_y) = \\ &= (\alpha_3 w + \beta_3 \bar{Q}_y) = (\alpha_4 w'_y + \beta_4 M_y) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

коэффициенты $\gamma_i, \delta_i, \alpha_i, \beta_i, i=1, 2, 3, 4$ меняются от 0 до 1.

Равенства (3), (4) позволяют рассмотреть все возможные варианты закрепления граничных кромок в отношении связанных плоской задачи и задачи изгиба: защемление, скользящую заделку, шарнирное закрепление, свободный край.

Влияние остаточных температурных напряжений, имеющих место при охлаждении после завершения процесса отверждения, а также предварительного натяжения армирующих волокон на несущую способность конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов представляется возможным оценить в том случае, когда граничные условия являются несогласованными, а решение строится в одинарных тригонометрических рядах либо с использованием метода однородных решений.

Конкретные исследования связаны с условиями закрепления панелей в составе проектируемой конструкции.

Проанализируем НДС конструктивно-анизотропной композитной панели, шарнирно опертой по продольным и произвольным образом закрепленной по поперечным кромкам.

Решение краевых задач в прямоугольной области для уравнения (1) построено в замкнутом виде в одинарных тригонометрических рядах для частного случая граничных условий по двум противоположным кромкам

$$\text{при } y = 0 \text{ и } y = 1 \quad u_0 = N_y = w = M_y = 0. \quad (5)$$

Эти условия принято называть согласованными: они соответствуют шарниру в отношении изгиба, а в отношении плоской задачи – скользящей заделке в тангенциальном направлении, когда часть контура панели нагружена потоками касательных сил. Панель по границе, перпендикулярной оси y , нагружена потоками касательных сил N_{yx} , которые уравниваются нормальными усилиями N_x на границе и площадках, перпендикулярных оси x .

Условия на торцах панели произвольны и могут быть условиями упругой заделки типа

$$\begin{aligned} x = \pm 1 \rightarrow (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) &= (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = \\ &= (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} x = -1 \rightarrow (\varepsilon_1 u_0 + \xi_1 N_x) = (\varepsilon_2 v_0 + \xi_2 N_{xy}) = \\ = (\varepsilon_3 w + \xi_3 \bar{Q}_x) = (\varepsilon_4 w'_x + \xi_4 M_x) = 0 \\ x = 1 \rightarrow (\gamma_1 u_0 + \delta_1 N_x) = (\gamma_2 v_0 + \delta_2 N_{xy}) = \\ = (\gamma_3 w + \delta_3 \bar{Q}_x) = (\gamma_4 w'_x + \delta_4 M_x) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

в симметричной либо в несимметричной краевых задачах, соответственно; коэффициенты $\gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i, \xi_i, i = 1, 2, 3, 4$ меняются от 0 до 1.

Разрешающая функция – обобщенная функция перемещений, удовлетворяющая (1), (5) и затем – (6) либо (7), раскладывается в ряд по системе тригонометрических функций

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \Phi_n(x) \sin(n\pi y), \quad (8)$$

то есть общее решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям, представим в одинарных тригонометрических рядах, где $\Phi_n(x)$ подлежит определению.

Исследуя далее задачу общего вида в смысле краевых условий по поперечным кромкам, в выражении (8) для $\Phi_n(x)$ оставим и четные, и нечетные функции, и с точностью до восьми произвольных постоянных запишем обобщенную функцию перемещений $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{L=1}^4 A_{nL} \operatorname{sh}(\lambda_{nL} x) + \sum_{L=1}^4 B_{nL} \operatorname{ch}(\lambda_{nL} x) + \Phi_n \operatorname{ч/н} \right] \sin(n\pi y). \quad (9)$$

Здесь Φ_n ч/н – частный интеграл обыкновенного неоднородного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка для $\Phi_n(x)$, $\lambda_{nL} = z_L \lambda_{ny} a$, $\lambda_{ny} = \frac{n\pi}{b}$, z_L – корни соответствующего характеристического полинома, которые находятся численно с использованием встроенных функций операционной среды *MATLAB*.

В одинарные тригонометрические ряды с точностью до констант A_{nL} и B_{nL} (9) раскладываются компоненты вектора перемещений, деформации и кривизны поверхности приведения, углы поворота, внутренние силовые факторы. В одинарные тригонометрические ряды раскладывается внешняя нагрузка $q(x, y)$, а также внутренние силовые факторы, связанные с температурой и натяжением.

Для окончательного моделирования компонентов НДС, то есть, по существу, системы неизвестных констант A_{nL} и B_{nL} ($n = 1, 3, 5, \dots, L = 1, 2, 3, 4$) необходимо удовлетворить граничным условиям на торцах конструкции при $x = +1$ и $x = -1$.

Если различным образом закреплены оба поперечных края панели, формируется и решается система восьми алгебраических уравнений. Когда строится решение симметричной краевой задачи, первые четыре уравнения будут реализовывать искомые произвольные постоянные B_{nL} ($n = 1, 3, 5, \dots, L = 1, 2, 3, 4$). При этом симметричные компоненты НДС зависят только от четных функций по координате x , косо-симметричные компоненты – от нечетных функций.

В соответствии с изложенным алгоритмом разработан пакет прикладных программ для *PC* на языке операционной среды *MATLAB*. Программы предназначены для исследования напряженно-деформированного состояния и оптимизации процесса проектирования конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. В рамках связанных плоской задачи и задачи изгиба рассматриваются все возможные варианты закрепления кромок, вытекающие из условий упругой заделки.

В качестве примера на *рис. 1* представлены результаты определения перемещений в прямоугольных панелях из углепластика с эксцентричным продольно-поперечным набором, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x, y) = \text{const}$. Граничные условия по координате x несимметричны. Один из краев $x = -1$ заземлен, на другом $x = +1$ – три комбинации граничных условий в отношении плоской задачи и в отношении изгиба: шарнир либо свободный от усилий и моментов край.

Максимальные прогибы в центре панели отличаются на 12%.

На *рис. 2* представлены результаты определения перемещений в прямоугольных панелях из углепластика, подкрепленных в продольном направлении, находящихся под действием постоянной погонной поперечной нагрузки $q(x, y) = \text{const}$. Так же, как и на *рис. 1*, граничные условия по координате x несимметричны. Один из краев $x = -1$ заземлен, на другом $x = +1$ – три комбинации граничных условий в отношении плоской задачи и в отношении изгиба: шарнир либо свободный от усилий и моментов край.

Максимальные прогибы в центре панели отличаются в 7,4 раза.

На *рис. 3* представлены результаты определения остаточных температурных напряжений, возникающих при охлаждении после завершения процесса отверждения в плоской прямоугольной панели из углепластика с несимметричной структурой пакета по толщине. Контур панели шарнирно оперт в отношении изгиба, граничные условия по продольным кромкам соответствуют скользящей заделке, поперечные края свободны от усилий и моментов в отношении плоской задачи.

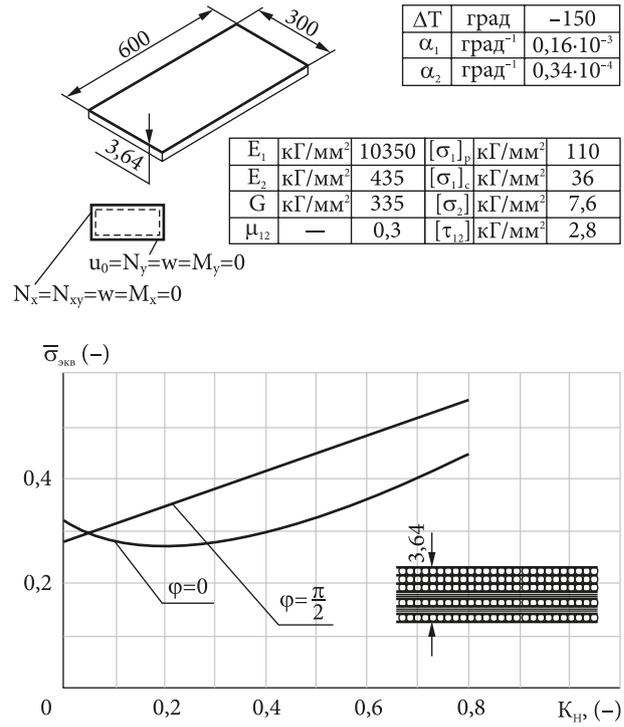
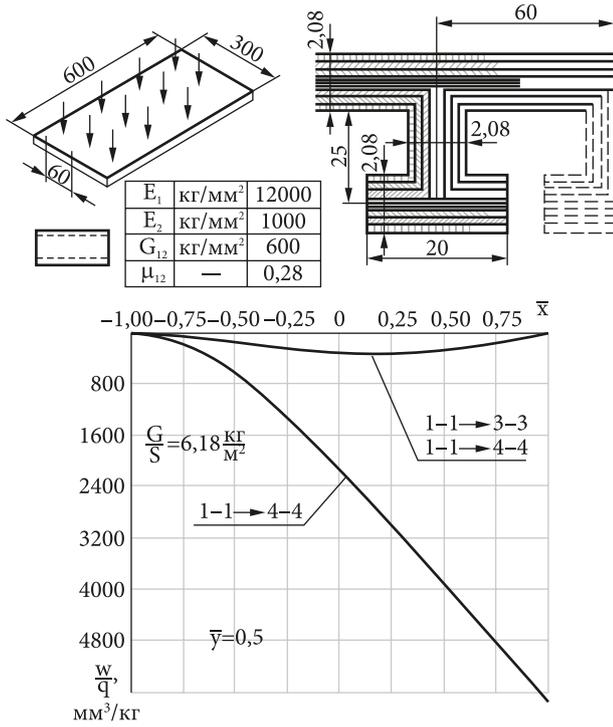


Рис. 2. Панель, подкрепленная в продольном направлении. Несимметричная краевая задача. Зависимость прогибов от типа граничных условий на торцах. Граничные условия: плоская задача – задача изгиба; 1 – защемление, 2 – скользящая заделка, 3 – шарнир, 4 – свободный край

Рис. 3. Панель с несимметричной структурой пакета. Зависимость эквивалентных остаточных температурных напряжений от коэффициента предварительного натяжения армирующих волокон

Дана оценка влияния предварительного натяжения армирующих волокон на уровень относительных эквивалентных остаточных технологических напряжений.

Оптимальный уровень предварительного натяжения соответствует 5% от допускаемой деформации слоя. Далее, от уровня в 20% процедура предварительного натяжения армирующих волокон для представленной несимметричной структуры пакета является неэффективной: относительные эквивалентные остаточные технологические напряжения и в продольных, и в поперечных слоях возрастают.

Выполнена компьютерная многокритериальная оптимизация конструктивно-анизотропных композитных панелей ЛА. Так как решение строится точными аналитическими методами, время расчета варианта минимально, что представляет интерес с точки зрения практики проектирования с использованием параметрического анализа. Результаты расчетов на прочность дают возможность

снижения и оптимизации весовых характеристик конструкции.

Литература

1. Бойцов Б.В., Гавва Л.М. Параметрический анализ напряженно-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Математическая модель. // Качество и жизнь. – 2017. – № 2. – С. 84 – 89.
2. Дудченко А.А., Елпатьевский А.Н., Лурье С.А., Фирсанов В.В. Расчет пластин из композиционных материалов. М.: МАИ, 1993. 68 с.
3. Молодцов Г.А., Гавва Л.М., Иванов В.И., Осинская Е.А. Макро- и микромоделли при расчете на прочность плоских панелей из слоистых композиционных материалов с учетом остаточных технологических напряжений и предварительного натяжения волокон. М. 1987. 30 с. (ВИНИТИ, № 6570 – В-87, 08.09.87).

The Parametrical Analysis of the Intense Deformed Condition of Constructive and Anisotropic Panels from Composite Materials. Solution of Regional Tasks

B.V. Boytsov, *doctor of technical sciences, professor, head of the department 104 «Technological design and quality managements» of Scientific research university Moscow aviation institute (NRU), first vice-president of Academy of quality problems; Moscow*

L.M. Gavva, *candidate of technical sciences, leading engineer, associate professor of Scientific research university Moscow aviation institute (NRU); Moscow*

e-mail: rva101@mail.ru

Summary. Updating of application of the quality concept, implementation of system high-quality concept to calculation and manufacture of perspective samples of the aircraft equipment from the modern composition materials are key questions in support of quality of production in aviarocket production.

Ratios of a mathematical model for a research of the intense deformed status of constructive and anisotropic panels from composition materials are given in the first part of article [1]. The mathematical model of the reinforcing element when twisting in the conditions of one-sided contact with a covering is specified. Influence of process of manufacturing techniques of panels is considered: residual temperature stresses and preliminary tension of reinforcing fibers. Based on the

variational principle of Lagrange the allowing equation of the eighth order and natural boundary conditions are constructed. In the second part of article the class of exact analytical solutions of boundary value problems in unary trigonometric rows is considered. In an operating environment of MATLAB the application program package is developed. Influence of design data on the level of tension and relocation is analyzed.

Keywords: panels from composite materials, an excentric longitudinally cross set, thin-walled core, asymmetrical structure of a package, power and technological temperature influence, the intense deformed status, unary trigonometrical ranks, MATLAB.

References:

1. Boytsov B.V., Gavva L.M. The parametrical analysis of the intense deformed condition of constructive and anisotropic panels from composite materials. Mathematical model. *Quality and life*. 2017. No. 2. pp. 84 – 89.
2. Dudchenko A.A., Elpatievsky A.N., Lurie S.A., Firsanov V.V. Calculation of plates from composite materials. *Moscow Aviation Institute (MAI)*. 1993. Moscow, 68 p.
3. Molodtsov G.A., Gavva L.M., Ivanov V.I., Osinskaya E.A. Makro – and micromodels when calculating on durability of flat panels from layered composite materials taking into account the residual technological tension and a preliminary tension of fibers. 1987. Moscow, 30 p. (*VINITI*, No. 6570 – V-87, 08.09.87).