



Уточнение теории расчета напряжений в цилиндрической оболочке переменной толщины с учетом поперечных деформаций

В.В. Фирсанов

д.т.н., зав. кафедрой МАИ, г. Москва

Ч.Н. Доан

д.философ.н., Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куй Дона, г. Ханой

Ч.Х. Ле

д.философ.н., Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куй Дона, г. Ханой

Введение

В авиационной промышленности при проектировании фюзеляжей самолетов и корпусов ракет в качестве элементов строительной механики широко применяются цилиндрические оболочки переменной толщины, соединяемые различными способами, в том числе с помощью сварки. Наличие соединений предъявляет повышенные требования к конструкции в отношении ее прочностных и ресурсных свойств, что заставляет разрабатывать все более совершенные методы расчета.

Инженерные расчеты на прочность и долговечность тонкостенных элементов конструкций типа пластин и оболочек базируются на результатах классической теории оболочек (теории типа Кирхгофа – Лява). В ее основу была положена гипотеза о сохранении нормального элемента, которая позволила привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной. Следовательно, нормальные сдвиговые деформации обращаются в нуль, а касательными сдвиговыми деформациями пренебрегают из-за их малости [1, 2].

Погрешность классической теории определяется, во-первых, мерой близости абстрактного материала, не допускающего поперечных деформаций, к реальному материалу оболочки и, во-вторых, переопределенностью задачи, что потребовало введения обобщенной поперечной силы Кирхгофа.

Применение в различных отраслях техники, в том числе в авиационной и ракетно-космической, композиционных материалов слоистой и волокнистой структуры, а также разработка новых методов расчета оболочечных конструкций из неоднородных материалов [3, 4], показали неправомерность, в той или иной степени, использования классической теории для таких материалов [5]. Поэтому основные усилия исследователей направлены на усовершенствование классической теории оболочек.

Эффекты, полученные в теории оболочек при учете деформаций сдвига, рассматривались Лурье А.И. [6], Hildebrand F.B., Reissner E., Thomas G.B. [7], Reissner E. [8]. Точные решения трехмерных уравнений и приближенные решения, полученные с помощью разложения перемещений по толщине, представлены Srinivas S. в работе [9], где найдены значительные расхождения между точными и классическими решениями теории оболочек.

Другой подход к построению теории пологих оболочек более высокого порядка представлен Васильевым В.В. и Лурье С.А. [10]. При этом искомые перемещения раскладываются в полиномиальные ряды по нормальной координате и формулируются условия согласованности перемещений, которые связывают между собой количество слагаемых в этих разложениях по тангенциальным и поперечному направлениям.

В настоящей работе применяется подход, представленный в [10, 11]. Трехмерные уравнения теории упругости сводятся к двумерным путем разложения параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек по толщине и применения принципа возможных перемещений. Кроме того, особенность данного подхода состоит в том, что тангенциальные напряжения определяются из соотношений закона Гука, а поперечные напряжения получаются интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости. Такой прием позволяет определить НДС не только тонкой оболочки, но и оболочки средней толщины. В работе используются нелинейные геометрические уравнения связи деформаций с перемещениями. На примере круговой цилиндрической оболочки из изотропного материала проводится расчет НДС в краевых зонах.

Постановка задачи

Замкнутая цилиндрическая оболочка переменной толщины рассматривается как трехмерное тело, отнесенное к ортогональной системе координат ξ, θ, z (рис. 1).

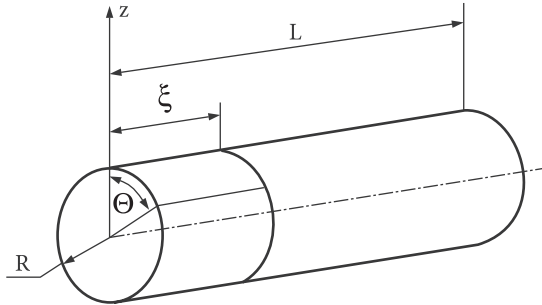


Рис. 1. Замкнутая цилиндрическая оболочка

Здесь ξ представляет собой относительное (измеренное в долях R) расстояние по образующей, θ – центральный угол, а ось z направлена по внешней нормали к срединной поверхности S .

Толщина оболочки переменная и определяется двумя функциями $h_1(\xi, \theta), h_2(\xi, \theta)$ т.е.

$$-h_1 \leq z \leq h_2, h = h_1(\xi, \theta) + h_2(\xi, \theta),$$

$z=R$ соответствует срединной поверхности S .

Перемещения и деформации оболочки

В соответствии с работами [10, 11], перемещения оболочки представляются в виде

$$U_1(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K u_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}, \quad U_2(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^K v_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!},$$

$$U_3(\xi, \theta, z) = \sum_{k=0}^{K-1} w_k(\xi, \theta) \frac{z^k}{k!}, \quad (2)$$

что соответствует условиям энергетической согласованности задачи.

Выражения, определяющие нелинейную деформацию оболочки, принимаются [12] как

$$\varepsilon_{11} = e_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right)^2, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right)^2,$$

$$\varepsilon_{13} = e_{13}, \quad \varepsilon_{23} = e_{23}, \quad \varepsilon_{12} = e_{12} + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right),$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e_{23} - \omega_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e_{13} + \omega_2 \right)^2. \quad (3)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$e_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} U_2, \quad e_{22} = \frac{1}{1+rz} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{U_3}{R} \right),$$

$$e_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial z},$$

$$e_{12} = \frac{1}{A_2(1+rz)} \frac{\partial U_1}{\partial \theta} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} U_1 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_2}{\partial \xi},$$

$$e_{13} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_3}{\partial \xi} + \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad e_{23} = \frac{1}{A_2(1+rz)} \frac{\partial U_3}{\partial \theta} + \frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{U_2}{R+z},$$

$$2\omega_1 = -\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{1}{1+rz} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial U_3}{\partial \theta} - \frac{U_2}{R} \right),$$

$$2\omega_2 = \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_3}{\partial \xi}, \quad (4)$$

где A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S ; $r = \frac{1}{R}$ – ее главная кривизна.

Соотношения (2), (3) и (4) полностью определяют деформированное состояние оболочки, при этом удовлетворяются уравнения неразрывности деформаций. При решении поставленной задачи применяются также уравнения равновесия в рассматриваемой системе координат и физические соотношения связи между напряжениями и деформациями.

Уравнения равновесия и краевые условия

Считаем, что на лицевых $z=+h_2, z=-h_1$ и торцевых поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{13}(+h_2) = q_{13}^+, \quad \sigma_{13}(-h_1) = q_{13}^-, \quad l = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{\alpha i} = q_{\alpha i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2.$$

Уравнения равновесия теории оболочек и граничные условия находятся с помощью вариационного принципа Лагранжа. После соответствующих операций [11] можно получить уравнения:

$$J_u^0 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_\xi}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{N_{\theta\xi}}{A_2} \right) + \frac{N_{\xi\theta}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + p_\xi^0 - X_\xi^0 = 0,$$

$$J_v^0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{N_\theta}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_{\xi\theta}}{A_1} \right) - \frac{N_\xi}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{N_\theta}{R} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \frac{N_{\theta\xi}}{A_1 R} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + \frac{Q_{\theta z}}{R} - \sum_{i=1}^K \left(\frac{\widehat{M}_\theta^i}{R^2} v_i \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{\widehat{M}_\theta^i}{A_2 R} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_{\theta\xi}^i}{A_1 R} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) + p_\theta^0 - X_\theta^0 = 0, \quad (5)$$

$$J_w^0 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{N_\xi}{A_1^2} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) - \frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Q_{\xi z}}{A_1} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\widehat{N}_\theta}{A_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{Q_{\theta z}}{A_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{N_{\theta\xi}}{A_1} \cdot \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{N_{\theta\xi}}{A_1 A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^K \left(\frac{\widehat{M}_\theta^i}{R A_2} v_i \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^K \left(\frac{M_{\theta\xi}^i}{A_1 R} v_i \right) +$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_{\xi}^i}{A_1^2} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{\widehat{M}_{\theta}^i}{A_2^2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} + \frac{M_{\theta \xi}^i}{A_1 A_2} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_{\theta \xi}^i}{A_1 A_2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right) + p_z^0 - X_z^0 = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_u^i &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{M_{\xi}^i}{A_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{M_{\theta \xi}^i}{A_2} + \frac{M_{\xi \theta}^i}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - Q_{\xi z}^i - \sum_{j=1}^K T_z^{ij} u_j + \\
 & + p_{\xi}^i - X_{\xi}^i = 0, \quad i = \overline{1,3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_v^i &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{M_{\theta}^i}{A_2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{M_{\theta \xi}^i}{A_1} - \frac{M_{\xi}^i}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - Q_{\theta z}^i + \frac{(i-1)}{R} M_{\theta z}^i + \\
 & + \frac{M_{\theta}^i}{R} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \frac{M_{\theta \xi}^i}{A_1 R} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta}^{ij}}{A_2 R} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \right) + \\
 & + \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{A_1 R} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} \right) - \sum_{j=1}^K \frac{L_{\theta}^{ij}}{R^2} v_j - \sum_{j=1}^K T_z^{ij} v_j + p_{\theta}^i - X_{\theta}^i = 0, \quad i = \overline{1,3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_w^i &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{M_{\theta \xi}^i}{A_1} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{M_{\theta z}^i}{A_2} - \frac{M_{\theta}^i}{R} - Q_z^i + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{M_{\xi}^i}{A_1^2} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\widehat{M}_{\theta}^i}{A_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{M_{\theta \xi}^i}{A_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{M_{\theta \xi}^i}{A_1 A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\xi}^{ij}}{A_1^2} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta}^{ij}}{A_2^2} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{A_1 A_2} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{A_1 A_2} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^K \left(\frac{L_{\theta}^{ij}}{A_2 R} v_j \right) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_{j=1}^K \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{A_1 R} v_j \right) + p_z^i - X_z^i = 0, \quad i = \overline{1,2},
 \end{aligned}$$

и соответствующие им непротиворечивые граничные условия при $\xi=0, \xi=\xi_0$

$$\begin{aligned}
 N_{\xi} &= \overline{N}_{\xi} \vee u_0 = u_0^r, \quad N_{\xi 0} = \overline{N}_{\xi 0} \vee v_0 = v_0^r, \\
 M_{\xi}^i &= \overline{M}_{\xi}^i \vee u_i = u_i^r, \quad M_{\xi \theta}^i = \overline{M}_{\xi \theta}^i \vee v_i = v_i^r, \quad i = \overline{1,3}, \\
 w_0 &= w_0^r \vee \overline{Q}_{\xi z} = Q_{\xi z} + \frac{N_{\xi}}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + N_{\theta \xi} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) - \\
 & - \sum_{i=1}^K \left(\frac{M_{\theta \xi}^i}{R} v_i \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_{\xi}^i}{A_1} \frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) + \sum_{i=1}^{K-1} \left(\frac{M_{\theta \xi}^i}{A_2} \frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right), \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_i &= w_i^r \vee \overline{M}_{\xi z}^i = M_{\xi z}^i + \frac{M_{\xi}^i}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\xi}^{ij}}{A_1} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} \right) + \\
 & + M_{\theta \xi}^i \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{R} \right) + \sum_{j=1}^{K-1} \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{A_2} \frac{\partial w_j}{\partial \theta} \right) - \sum_{j=1}^K \left(\frac{L_{\theta \xi}^{ij}}{R} v_j \right), \quad i = \overline{1,2}.
 \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения обобщенных усилий:

$$\begin{aligned}
 (N_{\xi}, N_{\xi \theta}, Q_{\xi z}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \times (1+rz) dz, \\
 (N_{\theta}, N_{\theta \xi}, Q_{\theta z}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}) dz, \quad N_{\theta} = \int_{-h_1}^{+h_2} \frac{\sigma_{22}}{(1+rz)} dz, \\
 (M_{\xi}^i, M_{\xi \theta}^i, M_{\xi z}^i) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \times (1+rz) \frac{z^i}{i!} dz, \\
 (M_{\theta}^i, M_{\theta \xi}^i, M_{\theta z}^i) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}) \frac{z^i}{i!} dz, \\
 (Q_{\xi z}^i, Q_z^i) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (\sigma_{13}, \sigma_{33}) \times (1+rz) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \\
 L_{\xi}^{ij} &= \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{11} (1+rz) \frac{z^{i+j}}{i! j!} dz, \quad L_{\theta}^{ij} = \int_{-h_1}^{+h_2} \frac{\sigma_{22}}{(1+rz)} \frac{z^{i+j}}{i! j!} dz, \\
 L_{\theta \xi}^{ij} &= \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{12} \frac{z^{i+j}}{i! j!} dz, \\
 T_z^{ij} &= \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{33} (1+rz) \frac{z^{i+j-2}}{(i-1)!(j-1)!} dz, \\
 (X_{\xi}^i, X_{\theta}^i, X_z^i) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (G_1, G_2, G_3) \times (1+rz) \frac{z^i}{i!} dz, \\
 p_{\xi}^i &= q_{13}^+ \left[(1+rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=+h_2)} - q_{13}^- \left[(1+rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=-h_1)}, \\
 Q_{\theta z}^i &= \int_{-h_1}^{+h_2} \sigma_{23} \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \\
 p_{\theta}^i &= q_{23}^+ \left[(1+rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=+h_2)} - q_{23}^- \left[(1+rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=-h_1)}, \\
 M_{\theta}^i &= \int_{-h_1}^{+h_2} \frac{\sigma_{22}}{(1+rz)} \frac{z^i}{i!} dz, \\
 p_z^i &= q_{33}^+ \left[(1+rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=+h_2)} - q_{33}^- \left[(1+rz) \frac{z^i}{i!} \right]_{(z=-h_1)}, \quad (7) \\
 (\overline{N}_{\xi}, \overline{N}_{\xi \theta}, \overline{Q}_{\xi z}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (q_{11}, q_{12}, q_{13}) \times (1+rz) dz, \\
 (\overline{M}_{\theta}, \overline{M}_{\theta \xi}, \overline{M}_{\theta z}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (q_{22}, q_{12}, q_{23}) \frac{z^i}{i!} dz, \\
 (\overline{M}_{\xi}^i, \overline{M}_{\xi \theta}^i, \overline{M}_{\xi z}^i) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (q_{11}, q_{12}, q_{13}) \times (1+rz) \frac{z^i}{i!} dz, \\
 (\overline{N}_{\theta}, \overline{N}_{\theta \xi}, \overline{Q}_{\theta z}) &= \int_{-h_1}^{+h_2} (q_{22}, q_{12}, q_{23}) dz.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что краевые условия (6) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления оболочки, а их количество полностью соответствует порядку нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (5).

В выражениях (7) следует положить

$T_1^{(0)} = T_2^{(0)} = T_3^{(0)} = 0$, а через G_i обозначены далам-

$$G_i = -\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

беровы силы инерции, т.е.

где ρ – плотность материала оболочки.

С помощью соотношений (2), (3), (4), (7), а также физических соотношений уравнения (5) могут быть преобразованы в уравнения относительно искомым перемещений, которые здесь, в силу их громоздкости, не приводятся, но их можно найти в [13] для произвольной ортотропной оболочки при условии линейности геометрических соотношений (3).

Уравнения для определения упругих перемещений приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений способом разложения в тригонометрические ряды по окружной координате. Полученные уравнения с переменными коэффициентами решаются методом конечных разностей. Производные 1-го и 2-го порядка аппроксимируются с помощью отношений центральных разностей со вторым порядком аппроксимации. Векторы искомым перемещений находятся методом прогонки. Для аппроксимации перемещений в узлах сетки используются сплайны.

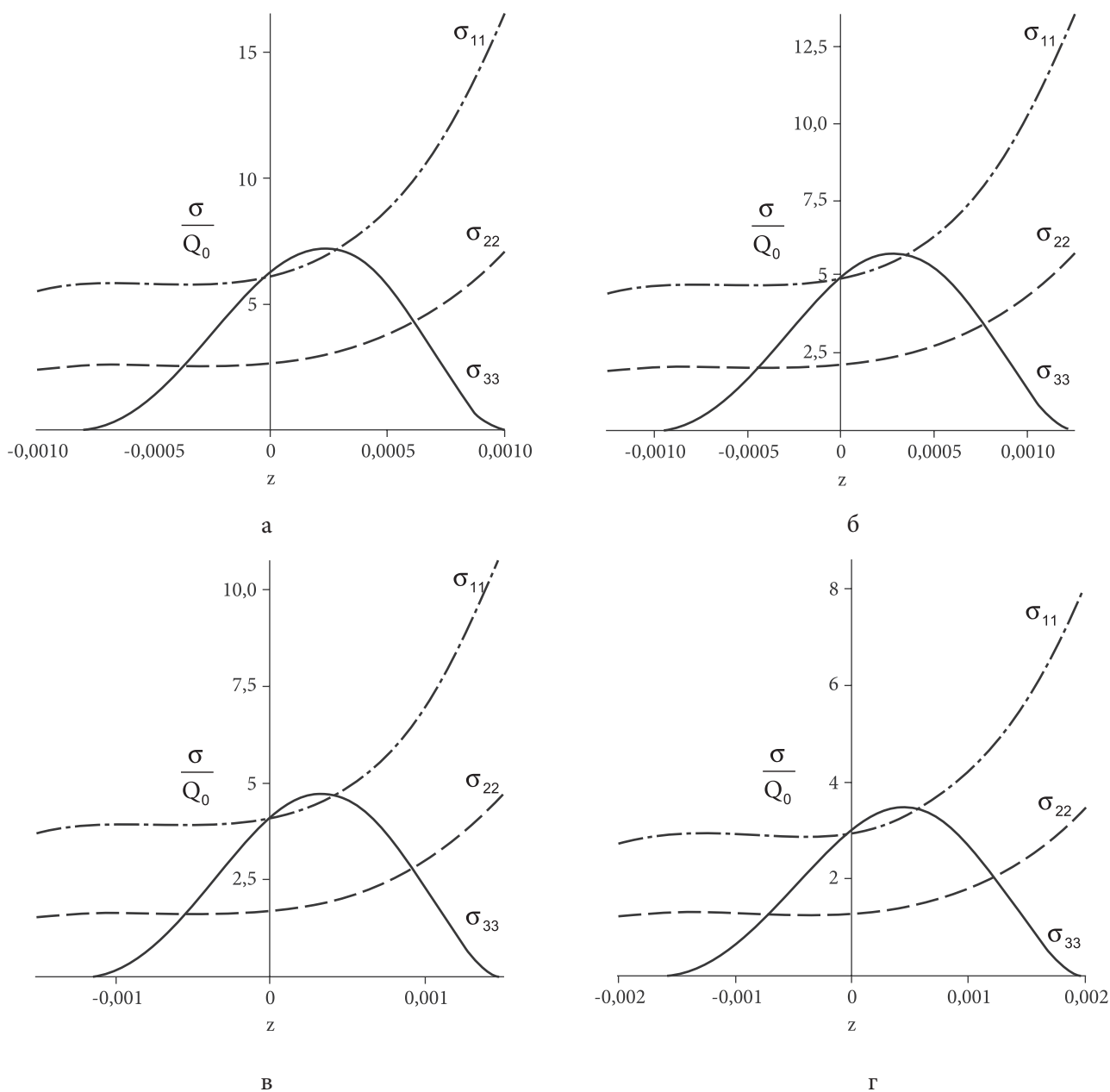


Рис. 2. Изменение нормальных напряжений по толщине на краях оболочки: а – на краю $\xi=0$ при $k_0=1/1600$; б – на краю $\xi=\xi_0$ при $k_0=1/1600$; в – на краю $\xi=\xi_0$ при $k_0=1/800$; г – на краю $\xi=\xi_0$ при $k_0=1/400$



Пример расчета

Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка с толщиной, симметрично изменяющейся в продольном направлении по линейному закону. Оболочка жестко закреплена по двум концам, ее полутолщина определяется равенством:

$$h_1 = h_2 = (\varepsilon_0 + k_0 \xi) R,$$

и на нее действует радиальная осесимметричная локальная нагрузка, закон изменения которой принимается в виде:

$$(\xi, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ Q_0 \cos \theta, & \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ 0, & \text{при } \xi_2 \leq \xi \leq \xi_0 \end{cases}$$

Пусть оболочка имеет следующие параметры: относительная длина $\xi_0 = L/R = 4$, радиус $R = 0,1$ м, $\varepsilon_0 = h_0/R = 1/100$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 3$. При расчете используется линейный вариант геометрических соотношений теории оболочек, а также принимается $K=3$. На рис. 2 показаны результаты расчета нормальных напряжений при различных значениях k_0 .

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что на краях оболочки максимальные поперечные нормальные напряжения σ_{33} составляют примерно 43% от максимальных тангенциальных нормальных напряжений σ_{11} . Следовательно, при оценке прочности оболочки в краевой зоне нельзя пренебречь поперечными нормальными напряжениями σ_{33} . Аналогичные результаты были получены в работе [14] при исследовании влияния погранслоя на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины комбинированным методом, основанным на методе асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости и вариационном методе Власова–Канторовича.

В данном случае способ изменения толщины оболочки существенно влияет на характер распределения напряжений по толщине оболочки.

Выводы

1. На основе трехмерных уравнений теории упругости в ортогональной системе координат с помощью вариационного принципа Лагранжа построены двумерные уравнения уточненной и, одновременно, геометрически нелинейной теории цилиндрических оболочек переменной толщины. Сформулированы соответствующие граничные условия, количество которых соответствует порядку системы дифференциальных уравнений уточненной теории.

2. Установлено, что существенный вклад в общее НДС круговой цилиндрической оболочки вно-

сят поперечные нормальные напряжения, значения которых составляет примерно 43% от максимальных тангенциальных нормальных напряжений, что очень важно для достоверной оценки прочности и долговечности оболочек из изотропных и композиционных материалов при наличии соединений и зон локального нагружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-01243).

Литература

1. Naghdi P.M. A survey of recent progress in the theory of elastic shells // Applied Mechanics Reviews. 1956. Vol. 9. No. 9. P. 365–368.
2. Bert C.W. Analysis of shells. In: Broutman // L.J. Analysis and performance of composites, Wiley, New York. 1980. P. 207–258.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
4. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Mechanics and analysis of composite materials. New York: Elsevier, 2001. 412 p.
5. Пикуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Изв. АН. МТТ. 2000. № 2. С. 153–168.
6. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
7. Hildebrand F.B., Reissner E., Thomas G.B. Note on the Foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. NACA TN 1833, 1949.
8. Reissner E. Stress-strain relations in the theory of thin elastic shells // Journal of mathematical physics. 1952. Vol. 31. P. 109–119.
9. Srinivas S. Analysis of laminated, composite, circular cylindrical shells with general boundary conditions. NASA TR R-412, 1974.
10. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 139–146.
11. Фирсанов В.В., Чан Нгок Доан. Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек произвольной геометрии // Вестник МАИ. 2011. Т. 18. № 1. С. 194–207.
12. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288 с.
13. Фирсанов В.В., Доан Ч.Н. Исследование статки и свободных колебаний цилиндрических оболочек на основе неклассической теории // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 1. С. 104–123.
14. Фирсанов В.В. Погранслой и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник МАИ. 2010. Т. 17. № 5. С. 212–218.