Математическая модель системы позиционирования сервопривода промышленного робота с заданными показателями качества

А.А. Жиленков

к.т.н., доцент кафедры «Систем управления и информатики» Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики; Санкт-Петербург

e-mail: zhilenkovanton@gmail.com

Ли Гуаняо

магистр Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики; Санкт-Петербург

Лю Жуйлэ

магистр Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики; Санкт-Петербург

Аннотация. Система подчиненного регулирования – система, работа которой заключается в последовательном включении контуров регулирования. Если в некоторой системе возникает необходимость регулировать несколько величин (скорость и ток двигателя, скорость перемещения и т.д.), то в ней применяются обратные связи по данным величинам, которые начинают работать, когда величина начинает превышать свое предельно допустимое значение, и такая система называется системой подчиненного регулирования.

В статье представлена математическая модель сервопривода для решения проблемы позиционирования промышленного робота, погрешности которого были бы в допустимой зоне и характеристики наведения удовлетворяли требованиям, предъявляемым к данной области применения.

Ключевые слова: моделирование, подчиненное регулирование, интервальная оценка, автоматическое управление, показатели качества.

Введение. Проблема позиционирования промышленных роботов играет важную роль в становлении автоматизированного производства. Современная приводная техника подразумевает высокие требования к технологическому процессу. Требования, выдвигаемые к динамике, т.е. скорости позиционирования промышленного робота в пространстве посредством привода, связаны с повышением производительности предприятия, ускорения производственных нагрузок и выпуска продукции. Соблюдение этих требований ведет к ускорению и улучшению производимой продукции. Повышение точности, минимизация затрат времени позиционирования являются актуальными задачами современной робототехники. От их реализации напрямую зависит качество производства и продукции, выпускаемой автоматизированным предприятием. Существует множество решений данных задач, однако темпы развития цифровых технологий дают возможность применения новых средств в системах управления электроприводами и позволяют добиваться лучших характеристик.

В данной статье представлена математическая модель сервопривода для решения проблемы позиционирования промышленного робота, погрешности которого должны быть в допустимой зоне, а характеристики наведения должны удовлетворять требованиям, предъявляемым к указанной области применения.

Математическое моделирование сервопривода. Работа системы подчиненного регулирования заключается в последовательном включении контуров регулирования [1]. Если в некоторой системе возникает необходимость регулировать несколько величин (скорость и ток двигателя, скорость перемещения и т.д.), то в ней применяются обратные связи по данным величинам, которые начинают работать, когда величина начинает превышать свое предельно допустимое значение, и такая система называется системой подчиненного регулирования.

На *рис. 1* представлен пример системы подчиненного регулирования [2].

Представленная система состоит из трех контуров: первый контур – регулирование тока якоря; второй контур – регулирование частоты вращения; третий контур – регулирование положения. На вход регулятора поступает сигнал с соответствующего ему объекта управления. Систему можно разбить на каскады, где предыдущий каскад за-

academquality.ru, ql–journal.ru

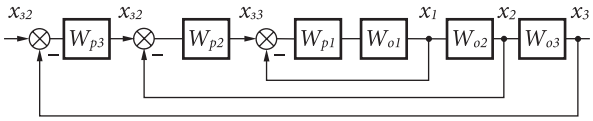

Рис. 1. **Структурная схема системы подчиненного регулирования:** W_{p1} – W_{p3} – передаточная функция контуров регулятора 1 – 3, соответственно; W_{o1} – W_{o3} – передаточная функция объекта управления 1 – 3, соответственно

дает следующий. Передаточная функция объекта регулирования состоит двух постоянных времени: большой и малой. Последние представлены в виде апериодических звеньев, последовательно соединенных между собой [3–4]:

$$W_{Oi}(p) = W_{Oi_k} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}(\tau_k p + 1)}. \quad (1)$$

В формуле (1) W_{Oi_k} является передаточной функцией тех звеньев, влияние которых может быть установлено регулятором. Дробная часть формулы представляет собой передаточные функции апериодических звеньев, скомпенсировать влияние которых не представляется возможным.

Для правильного функционирования регулятора, как правило, выбираются параметры, при которых включение его последовательно со звеном системы дает полное гашение большой постоянной времени, а взамен работает меньшая постоянная. Пусть объект регулирования (ОР) будет апериодическим звеном:

$$W_O = \frac{1}{T_O p + 1}. \quad (2)$$

В формуле (2) T_O – постоянная времени ОР.

$$W_3(p) = 1. \quad (3)$$

Формула (3) – передаточная функция замкнутого контура регулирования при идеальном переходном процессе. Чтобы условие формулы (3) выполнялось, регулятор должен быть форсирующим звеном в виде передаточной функции:

$$W_p(p) = T_O p + 1. \quad (4)$$

Физически звено (4) реализовать невозможно, поэтому в реальных системах применяется пропорционально интегральный регулятор (ПИ-регулятор). Его передаточная функция записывается в виде:

$$W_p(p) = \frac{T_O p + 1}{T_u p}, \quad (5)$$

где T_u является постоянной регулирования. Исходя из вышеописанного, последовательное включение ПИ-регулятора (5) и ОР (2) даст уравнение передаточной функции замкнутого контура:

$$W_3(p) = \frac{W_p(p) \cdot W_O(p)}{1 + W_p(p) \cdot W_O(p)} = \frac{\frac{T_O p + 1}{T_u p} \cdot \frac{1}{T_O p + 1}}{1 + \frac{T_O p + 1}{T_u p} \cdot \frac{1}{T_O p + 1}} = \frac{1}{T_u p + 1}. \quad (6)$$

Из формулы (6) видно, что T_O исключается. Это говорит о том, что ПИ-регулятор позволяет исключить разомкнутый контур большой постоянной времени, заменяя его на замкнутый контур с T_u. В результате исключения больших постоянных времени в реальных системах передаточная функция разомкнутого контура будет иметь вид:

$$W_i^p(p) = \frac{1}{T_{iu} p \prod_{k=1}^{m}(\tau_{ik} p + 1)}. \quad (7)$$

При $\tau_{ik} << 1$ формула (7) примет вид:

$$\prod_{k=1}^{m}(\tau_{ik} p + 1) \approx p \sum_{k=1}^{m} \tau_{ik} + 1 = T_{i\mu} p + 1. \quad (8)$$

Формулы передаточных функций замкнутых и разомкнутых контуров и формула характеристического уравнения будут иметь следующий вид [5, 6]:

$$W_i^p(p) = \frac{1}{T_{iu} p (T_{i\mu} p + 1)},$$

$$W_i^3(p) = \frac{1}{T_{iu} p (T_{i\mu} p + 1) + 1},$$

$$T_{iu} T_{i\mu} p^2 + T_{iu} p + 1 = 0.$$

Исходя из вышеприведенных формул, можно найти собственную частоту контура, которая равна $1/\sqrt{T_{iu} T_{i\mu}}$, и коэффициент демпфирования: $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{T_{iu} T_{i\mu}}$. Можно сделать вывод, что поведение переходного процесса будет зависеть от величины меньшей постоянной времени и отношения $T_{iu}/T_{i\mu}$.

Передаточные функции контуров регулирования при настройке всех контуров на модульный оптимум примут вид:

$$W_1^3(p) = \frac{1}{a_1 T_\mu p (T_\mu p + 1) + 1},$$

$$W_2^3(p) = \frac{1}{a_1 a_2 T_\mu p (a_1 T_\mu p + 1) + 1}.$$

Последующие передаточные функции контуров выводятся аналогично. Как было показано, система управления сервоприводом, которая состоит из регулятора тока, скорости и положения, подключенных последовательно с обратными связями, строится на основе принципа подчиненного регулирования.

Функциональная схема системы управления сервоприводом представлена на *рис. 2* [5, 7].

Выходная величина модели $\varphi = \frac{1}{p}\omega$ – угол поворота двигателя .

На *рис. 2* двигатель представлен двумя звеньями:

$$W_{дв}^{1}(p) = \frac{1/R_Э}{T_Э\, p+1}, \qquad (9)$$

где $R_Э$ – активное сопротивление якоря, $T_э$ – электромагнитная постоянная времени.

$$W_{дв}^{2}(p) = \frac{R_Э}{T_M C\Phi p}, \qquad (10)$$

где $T_М$ – электромеханическая постоянная времени, C – конструктивная постоянная двигателя, Φ – магнитный поток двигателя.

Тиристорный преобразователь представлен передаточной функцией апериодического звена [6]:

$$W_{mn}(p) = \frac{K_{mn}}{T_\mu p+1}, \qquad (11)$$

где T_μ – постоянная времени, K_{mn} – коэффициент усиления.

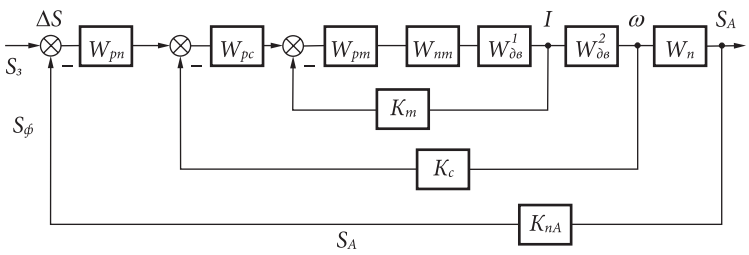

Рис. 2. **Функциональная схема системы управления сервоприводом:** $W_{pn}(p)$ – регулятор положения, $W_{pc}(p)$ – регулятор скорости, $W_{pm}(p)$ – регулятор тока, $W_{mn}(p)$ – тиристорный преобразователь, $W_{дв}^1(p)$, $W_{дв}^2(p)$ – двигатель, $W_n(p)$ – передаточный механизм, K_m – коэффициент передачи обратной связи по току, K_c – коэффициент передачи обратной связи по скорости, K_{nA} – коэффициент передачи обратной связи датчика положения, S_A – перемещение, $S_Ф$ – фактическое перемещение, ΔS – рассогласование перемещения, ω – скорость вращения вала двигателя, I – ток двигателя

Для дальнейшего моделирования необходимо определить передаточные функции регуляторов. Передаточная функция регулятора тока якоря, исходя из формулы (9), примет вид:

$$W_{pm}(p)\cdot W_{mn}(p)\cdot W^{1}(p)\cdot K_m = \\ = W_{pm}(p)\cdot\frac{K_{mn}}{T_\mu p+1}\cdot\frac{1/R_Э}{T_Э p+1}\cdot K_m = \frac{1}{a_m T_\mu p(T_\mu p+1)}. \qquad (12)$$

Окончательный вид:

$$W_{pm}(p) = \frac{R_Э(T_Э\, p+1)}{a_m T_\mu K_{mn} K_m p}. \qquad (13)$$

Передаточная функция замкнутого контура тока:

$$W_m^3(p) = \frac{I(p)}{U_{3m}(p)} = \frac{1/K_m}{a_m T_\mu\, p(T_\mu\, p+1)+1}. \qquad (14)$$

Передаточная функция регулятора скорости:

$$W_{pc}(p)\cdot W_T^3\cdot W_{дв}^2(p)\cdot K_c = \\ = W_{pc}(p)\cdot\frac{1/K_m}{a_m T_\mu\, p(T_\mu\, p+1)+1}\cdot\frac{R}{T_M C\Phi p}\cdot K_c = \\ = \frac{1}{a_c a_m T_\mu\, p(a_m T_\mu\, p+1)}. \qquad (15)$$

Множителем $a_m T_\mu^2 p^2$ можно пренебречь, тогда получим следующее выражение:

$$W_{pc} = (p) = \frac{K_T T_M C\Phi}{a_c a_m T_\mu\, R_Э\, K_c}. \qquad (16)$$

Передаточная функция замкнутого контура скорости:

$$W_c^3(p) = \frac{\omega(p)}{U_{3c}(p)} = \frac{1/K_c}{a_c a_m T_\mu\, p(a_m T_\mu\, p+1)+1}. \qquad (17)$$

Передаточная функция регулятора положения:

$$W_{pn}(p) = K_{pn} = \frac{K_c}{K_п}\sqrt{\frac{4I_{max}R}{T_M C\Phi\varphi_з}\cdot\frac{I_{max}+I_c}{I_{max}-I_c}}, \qquad (18)$$

где I_{max} – максимальный ток двигателя, I_c – статический ток.

academquality.ru, ql–journal.ru

Необходимо для регулятора положения определить коэффициент усиления. В ходе перемещения зависимость максимальной скорости оборотов по отношению к номинальной выглядит следующим образом: $\omega_{макс}<\omega_{ном}$. Торможение двигателя начинается при условии: $\omega_{макс}=\omega_{ном}$. Формула скорости окончания разгона и начала торможения:

$$\omega_{ном}=\varepsilon_p t_p=\varepsilon_m t_T. \quad (19)$$

Угловое ускорение разгона:

$$\varepsilon_p=\frac{M_{max}-M_c}{J}=\frac{I_{max}+I_c}{J}\cdot C\Phi\ . \quad (20)$$

Угловое ускорение торможения:

$$\varepsilon_m=\frac{M_{max}+M_c}{J}=\frac{I_{max}+I_c}{J}\cdot C\Phi\ . \quad (21)$$

В формулах (20) и (21) M_{max} – максимальный момент, M_c – момент статической нагрузки, J – момент инерции.

Формулы времени разгона и торможения, соответственно:

$$t_p=\omega_{ном}/\varepsilon_p;\ t_T=\omega_н/\varepsilon_m. \quad (22)$$

Перемещение рассчитывается по формуле:

$$\varphi_з=\varphi_p+\varphi_m, \quad (23)$$

где φ_p – перемещение при разгоне, φ_m – перемещение при торможении.

Подставляя в (23) выражения (20) – (22), получим:

$$\varphi_з=\frac{\varepsilon_p t_p^2}{2}+\frac{\varepsilon_m t_т^2}{2}=\frac{\varepsilon_p\omega_н^2}{2\cdot\varepsilon_p^2}+\frac{\varepsilon_m\omega_н^2}{2\cdot\varepsilon_т^2}=\frac{\omega_н^2}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_p}+\frac{1}{\varepsilon_m}\right)=$$
$$=\frac{\omega_н^2 J}{2C\Phi}\left(\frac{1}{I_{max}-I_c}+\frac{1}{I_{max}+I_c}\right)=\frac{\omega_н^2 T_M C\Phi I_{max}}{R_Э(I_{max}^2-I_c^2)}. \quad (24)$$

При подстановке выражения (24) в (18) получим необходимое выражение коэффициента усиления:

$$K_{pп}=\frac{K_c}{K_п}\sqrt{\frac{4I_{max}R_Э}{T_M C\Phi}\cdot\frac{I_{max}+I_c}{I_{max}-I_c}\cdot\frac{R_Э(I_{max}^2-I_c^2)}{\omega_н^2 T_M C\Phi I_{max}}}=$$
$$=\frac{K_c}{K_п}\cdot\frac{2R_Э I_{max}}{T_M C\Phi\omega_н}\cdot\left(1+\frac{I_c}{I_{max}}\right).$$

Для упрощения моделирования необходимо представить передаточные функции контуров тока и скорости в следующем виде:

$$W_m^3(p)=\frac{1/K_т}{a_т T_\mu\, p(T_\mu p+1)+1}$$
$$W_{pc}(p)=K_{pc}=\frac{K_m T_M C\Phi}{a_c a_m T_\mu R_Э K_c}.$$

Регулятор скорости ограничивается значением максимального тока якоря.

Средние и большие перемещения происходят при ограничении скорости, что выполняется при условии равенства максимальной скорости с номинальной скоростью вращения:

$$W_{pп}(p)=K_{pп}=\frac{K_c}{K_п}\cdot\frac{2I_{max}R_Э}{T_M C\Phi\omega_н}\cdot\left(1+\frac{I_c}{I_{max}}\right).$$

Так как работа привода связана с широким диапазоном изменения статического момента, выбор коэффициента усиления происходит в процессе отработки задания при перемещении с достижением максимальной скорости, когда отсутствует нагрузка. Это позволяет исключить перерегулирование по положению:

$$W_{pп}(p)=K_{pп}=\frac{K_c}{K_п}\cdot\frac{2I_{max}R_Э}{T_M C\Phi\omega_н}.$$

Структурная схема привода с упрощениями представлена на *рис. 3* [5, 6].

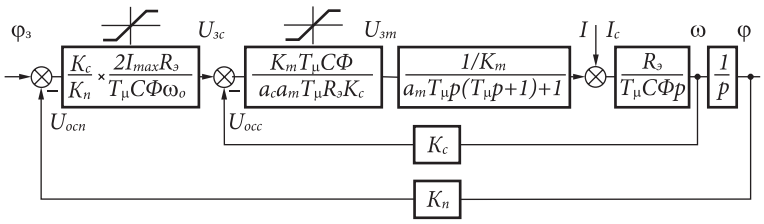

Рис. 3. **Упрощенная структурная схема привода**

Выводы. Представленная математическая модель сервопривода применима для решения проблемы позиционирования промышленного робота, погрешности которого не выходят из допустимой зоны, а характеристики наведения удовлетворяют требованиям, предъявляемым к данной области применения. Средние и большие перемещения в модели происходят при условии ограничения скорости, которое выполняется при условии равенства максимальной скорости с номинальной скоростью вращения. Так как работа привода связана с широким диапазоном изменения статического момента, выбор коэффициента усиления происходит при отработке задания при перемещении с достижением максимальной скорости при отсутствии нагрузки. Это позволяет исключить перерегулирование по положению.

Литература

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
2. Khosla K. Choosing Sampling Rates for Robot Control. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 1987. 22 p.
3. Ata A.A., Myo T.R. Optimal Point-to-Point Trajectory Tracking of Redundant Manipulators using Generalized Pattern Search // International Journal of Advanced Robotic Systems. 2005. Vol. 2, No. 3. P. 239–244.
4. Zhilenkov A.A. The study of the process of the development of marine robotics // Vibroengineering Procedia, IET – 2016, Vol. 8, pp. 17–21.
5. Жиленков А.А. Математическое описание взаимодействий датчика и объекта в задачах контроля целостности элементов конструкций подводных сооружений при сканировании зондирующим лучом // Системы управления и информационные технологии, 2016. Т. 65. № 3. С. 68–72.
6. Zhilenkov A.A., Efremov A.A. Quality evaluation of stabilization of rotation frequency of gas-diesel engines when using an adaptive automatic control system // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, IET – 2017, Vol. 177, No. 1, pp. 012043.
7. Siciliano B., Khatib O. (Eds). Springer Handbook of Robotics. Springer Berlin Heidelberg, 2008. 1628 p.

Mathematical Model of System of Positioning of the Servo-Driver of the Industrial Robot with the Set Quality Indicators

A.A. Zhilenkov, *candidate of technical science, associate professor of «Control systems and informatics» of the St. Petersburg national research university of information technologies, mechanics and optics; St. Petersburg*

e-mail: zhilenkovanton@gmail.com

Li Guanyao, *master of the St. Petersburg national research university of information technologies, mechanics and optics; St. Petersburg*

Lu Zhuile, *master of the St. Petersburg national research university of information technologies, mechanics and optics; St. Petersburg*

Summary. System of the subordinate of regulation – system which work consists in consecutive inclusion of contours of regulation. If in some system there is a need to regulate several sizes (speed and current of the engine, movement speed, etc.), then feedback in these sizes are applied which begin to work when size begins to exceed the maximum-permissible value, and such system is called system of the subordinated regulation.

In article is given the mathematical model of the servo-driver for a solution of the problem of positioning of the industrial robot which errors would be in an admissible zone is presented in article and characteristics of targeting met requirements imposed to this scope.

Keywords: the modeling, subordinated regulation, an interval assessment, automatic control, quality indicators.

References:

1. Analytical mechanics. *Phismathlit*. 1961. Moscow, 824 p.
2. Khosla K. Choosing Sampling Rates for Robot Control. *Pittsburgh: Carnegie Mellon University,* 1987. 22 p.
3. Ata A.A., Myo T.R. Optimal Point-to-Point Trajectory Tracking of Redundant Manipulators using Generalized Pattern Search. *International Journal of Advanced Robotic Systems.* 2005. V. 2. No. 3. pp. 239–244.
4. Zhilenkov A.A. The study of the process of the development of marine robotics. *Vibroengineering Procedia, IET.* 2016, V. 8. pp. 17–21.
5. Zhilenkov A.A. The mathematical description of interactions of the sensor and object in problems of control of integrity of elements of designs of underwater constructions when scanning by the probing beam. *Control systems and information technologies.* 2016. V. 65. No. 3. pp. 68–72.
6. Zhilenkov A.A., Efremov A.A. Quality evaluation of stabilization of rotation frequency of gas-diesel engines when using an adaptive automatic control system. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering,* IET – 2017. V. 177. No. 1. pp. 012043.
7. Siciliano B., Khatib O. (Eds). Springer Handbook of Robotics. *Springer Berlin Heidelberg.* 2008. 1628 p.

academquality.ru, ql–journal.ru