

# Концентрация контактных напряжений и деформаций упругих тел конечных размеров при силовом контакте по линии

**Ф.Г. Нахатакян**

к.т.н., ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН,  
г. Москва

**В.В. Фирсанов**

д.т.н., зав. кафедрой МАИ,  
г. Москва

При расчете прочности роликовых подшипников, зубчатых зацеплений, а также других ответственных узлов машин и механизмов общего машиностроения, в том числе авиационной и ракетно-космической отрасли, необходимо учитывать так называемый краевой эффект. Он возникает в результате повышенной податливости деталей ограниченных размеров в краевой зоне, что приводит к значительному возрастанию напряжений, причем последние в свою очередь сильно снижают долговечность узла (например, роликовых подшипников).

О количественной оценке этого явления можно судить по результатам приведенного в работе [1] опыта. На поверхность плоской плиты толщиной 50 мм и диаметром 200 мм на расстоянии 50 мм от ее края был наклеен в радиальном направлении проволоочный тензодатчик с базой 3 мм (рис. 1).

При нагружении плиты сферическим индикатором сначала со стороны ее края на расстоянии 30 мм от датчика (положение 1), потом на том же расстоянии со стороны центра плиты (положение 2), при абсолютной идентичности всех прочих условий показания в первом случае на 30...40% были больше, чем во втором. Это является следствием более высокой податливости тела плиты со стороны ее края.

Долговечность роликовых опор по признаку усталостного выкрашивания обратно пропорцио-

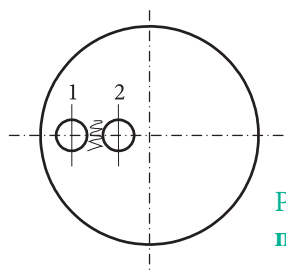


Рис. 1. Цилиндрическая плита

нальна  $\sigma^m$ , где  $\sigma$  – уровень контактных напряжений;  $m = 6...9$  [2] показатель степени, поэтому материал роликов и беговых дорожек колец в зонах действия краевого эффекта подвержен разрушению в несколько раз быстрее по сравнению с материалом остальной части области контакта.

С целью определения влияния конечных размеров тел на их контактную деформацию в работе [3] приведены результаты экспериментального исследования контактной деформации прямоугольной плиты с размерами:  $l = 200$  мм;  $b = 120$  мм;  $s = 120$  мм, в зависимости от расстояния  $x$  точки приложения силы от свободного края. На рис. 2 соответствующий график показан в безразмерном виде, где:  $\bar{\delta}_k = \delta_k / \delta_{k_{max}}$  от  $\bar{x} = x/l$ , здесь  $\delta_k = w_k/P \cdot 10^{-3}$ , мкм/н. Из рис. 2 следует, в частности, что контактная податливость плиты по мере приближения к свободному краю увеличивается и на краю примерно в два раза больше, чем в срединной области.

Несмотря на важность этих результатов, отмеченное явление мало изучено. В настоящей работе построена модель расчетного определения деформации и коэффициента концентрации контактных напряжений от рассматриваемого эффекта с помощью теории упругого основания.

Простейшее представление непрерывного упругого основания было дано Винклером [4], который предполагал основание состоящим из тесно расположенных линейных пружин, деформирующихся независимо друг от друга. Для того чтобы максимально приблизить картину деформации с помощью пред-

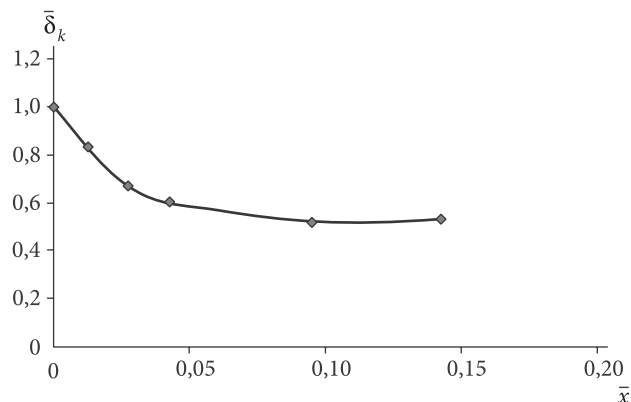


Рис. 2. Экспериментальные данные [3] контактной деформации плиты в безразмерном виде



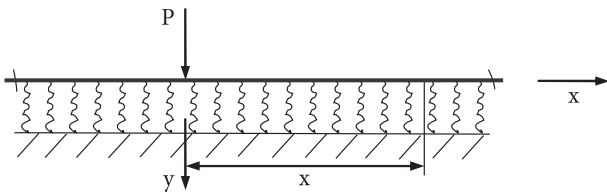
лагаемой модели к реальным результатам, следует верхние концы пружин винклеровского основания соединить с помощью балки, работающей на изгиб, то есть получить основание в виде работающей на изгиб балки, аналогично балке на упругом основании. Для нее прогиб (рис. 3) от действия сосредоточенной нагрузки  $P$  определяется формулой [5]:

$$y = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \quad (1)$$

где  $\beta x$  – безразмерный параметр длины балки;

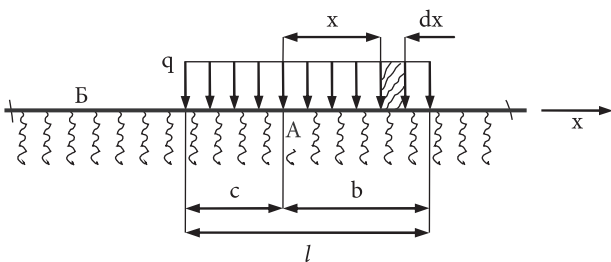
$$\beta^4 = \frac{k}{4EI_z};$$

где  $EI_z$  – жесткость балки при изгибе;  $E$  – модуль упругости материала балки;  $k$  – коэффициент постели упругого основания.



**Рис. 3. Изгиб балки бесконечной длины на упругом основании**

С целью моделирования краевого эффекта, рассмотрим контакт двух цилиндров одинакового диаметра, один из которых имеет бесконечную длину, а другой – конечную, равную  $l$ . В качестве расчетной модели принимается балка бесконечной длины на упругом основании, изгибаемая под действием равномерно распределенной по длине  $l$  нагрузки  $q$  (рис. 4).



**Рис. 4. Изгиб балки бесконечной длины на упругом основании под действием равномерно распределенной по конечной длине нагрузки**

Для определения прогиба этой балки вблизи нагруженного участка (см. рис. 4) по формуле (1) находим прогиб  $dy$  от элементарной нагрузки  $qdx$  и далее интегрируем его по всей длине  $l$ , что дает:

$$y = \frac{q}{k} \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\beta b} \cos \beta b - \frac{1}{2} e^{-\beta c} \cos \beta c \right). \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что внутри нагруженного участка в точках, удаленных от концов (при достаточно больших  $c$  и  $b$ ), прогиб приближенно будет равен:

$$y_0 = \frac{q}{k}, \quad (3)$$

т.е. равномерная нагрузка  $q$  непосредственно передается упругому основанию. На концах нагруженного участка (т.е. при  $c = 0, b = l$  и  $c = l, b = 0$ ) имеем  $y \approx \frac{q}{2k}$ , т.е. в этом случае величина прогиба составляет лишь половину от  $y_0$ .

При таком подходе проблема будет заключаться в правильном определении коэффициента постели упругого основания  $k$ . Его можно определить, исходя из условия, что при одинаковой длине цилиндров их контактная деформация  $w_H$  и прогиб балки на упругом основании  $y_0$  будут совпадать:

$$w_H = y_0. \quad (4)$$

Здесь, согласно [6], контактная деформация цилиндров определяется

$$w_H = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,5 \right], \quad (5)$$

где  $\nu$  и  $E$  – коэффициент Пуассона и модуль упругости материала цилиндра соответственно;  $R$  – радиус цилиндра;  $b$  – полуширина площадки контакта по Герцу. Перепишем (4) с учетом (3) и (5), тогда получим:

$$y_0 = \frac{q}{k} = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,5 \right] = \bar{\delta}_0 \cdot q.$$

где  $\bar{\delta}_0 = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \ln \frac{4R}{b} - 0,5 \right] = k^{-1}$ . Следовательно, при разной длине цилиндров контактная деформация короткого цилиндра с учетом зависимости (2) будет выражаться так:

$$w = \bar{\delta}_0 \cdot q \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} \theta(\beta b) - \frac{1}{2} \theta(\beta c) \right], \quad (6)$$

где  $\theta(x) = e^{-x} \cos x$ .

Прогиб цилиндра, рассчитанный по зависимости (6), показан на рис. 5, где  $w_{сбл}$ ;  $w_{цил1}$  и  $w_{цил2}$  – полное сближение цилиндров в результате их суммарной деформации; контактная деформация первого и второго цилиндров, соответственно. Анализ формулы (6) показал, что податливость у свободного края короткого цилиндра в два раза больше, чем в срединной области, что согласуется с экспериментальными данными (см. рис. 2).

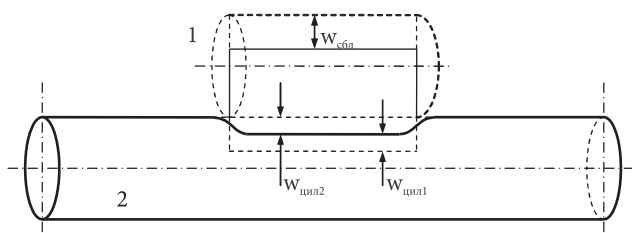


Рис. 5. Деформации цилиндров различной длины при контактном взаимодействии

Формула (6) справедлива для цилиндров, один из которых имеет бесконечную длину, а второй – конечную длину  $l$ . В случае, когда длины цилиндров – соразмерные величины, то решение задачи аналогично изложенному. В работе [7] получена зависимость для определения прогиба балки конечной длины  $l$  на упругом основании при действии сосредоточенной силы  $P$  в виде:

$$y(x, c) = \frac{P/l}{k} \cdot f(\beta l, c, x),$$

где  $f(\beta l, c, x)$  – безразмерная функция [7];  $c, x$  – координаты приложения силы и точки, где определяем перемещение, соответственно. Для определения прогиба такой балки при действии распределенной по длине  $l_1$  нагрузки, необходимо найти прогиб  $dy$  от элементарной силы  $qdx$  с последующим интегрированием полученного выражения по всей длине  $l_1$ .

Данная модель позволяет определить концентрацию напряжений на концах короткого цилиндра, что не удастся описать в рамках теории Герца, несмотря на то, что контактные напряжения, действующие вдоль большей части длины цилиндра, рассчитываются по теории Герца с хорошей точностью. Этот эффект объясняется особенностью контакта цилиндрических тел конечных размеров.

Действительно, концентрация контактных деформаций  $K_H$  на концах короткого цилиндра определяется по формуле:

$$K_H = \frac{w}{w_H} = \frac{y}{y_0},$$

откуда с учетом выше изложенного получим:

$$K_{Hцил1}^{max} = \frac{q/2k + q/k}{q/k} = 1,5.$$

Следовательно, для коэффициента концентрации контактных напряжений на концах короткого цилиндра получим значение:

$$K_\sigma = \frac{\sigma}{\sigma_H} = \sqrt{K_H} = 1,22,$$

где  $\sigma_H$  – контактные напряжения по Герцу.

## Выводы

С использованием упругого основания построена модель так называемого краевого эффекта упругих тел конечных размеров, имеющих цилиндрическую форму, при их контактном взаимодействии. Впервые получены расчетные формулы для определения контактных деформаций и коэффициента концентрации напряжений в краевой зоне цилиндрических тел конечных размеров.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-01243).

## Литература

1. Орлов А.В. Упругие деформации и напряжения на линейном контакте. // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2006., № 6, С. 31-36.
2. Кудрявцев В.Н. Детали машин. Ленинград.: Машиностроение, 1980, 464 с.
3. Jshikawa J., Umezawa K. Контактные деформации зубьев колес конечной ширины. М.: ВИНТИ, Экспресс-информ. «Детали машин». 1973, № 39, С. 21-32.
4. E. Winkler, «Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit», Prag, Dominicus, 1867.
5. Тимошенко С.П. Сопrotивление материалов, Т. 2. М.: Наука, 1965, 480 с.
6. Нахатакян Ф.Г. Об одном методе точного решения контактной задачи Герца для круговых цилиндров с параллельными осями. // Вестник машиностроения. 2011. № 3, С. 3-6.
7. Нахатакян Ф.Г., Косарев О.И., Леонтьев М.Ю., Пузакина А.К. Расчетное определение коэффициента изгибных напряжений на зубьях зубчатых колес при перекосе. // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2010, № 2, С. 61-69.